SATZ: Für beliebige Zerlegungen T_a, T_b gilt immer
$$U(f, T_a) \le O(f, T_b)$$

Definition: $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt heißt RIEMANN INTEGRIERBAR auf I, wenn
$$\sup_T U(f,T) = \inf_T O(f,T) =: \int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$$

SATZ:

Falls $f: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Intervall}}}{I} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f Riemann integrierbar

Vorsicht: Es gibt auch Funktionen, die nicht stetig sind, aber trotzdem Riemann integrierbar.

Frage: Wie berechnen wir $\int_I f(x)\,dx$?

SATZ: (Fubini)

Sei f Riemann integrierbar auf $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Intervall}}}{I} \subset \mathbb{R}^n$, mit $I = [a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$

Dann

1) $I_k = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$

   $I_k \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist noch ein Intervall

   Falls
   $$\int_I f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)\, d(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$$
   existiert für alle $x_k \in [a_k, b_k]$, dann
   $$\int_{a_k}^{b_k} \int_{I_k} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
   $$= \int_I f(x)\,dx$$

2) Falls
   $$\int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_n)$$
   für alle $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in I_k$ existiert, dann existiert
   $\int_I f(x)\,dx$ und

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{I_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_k \right) d(x_1,\dots,x_n)$$

3) Falls f stetig auf I ist, dann

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \dots$$

und die Reihenfolge der Integration kann vertauscht werden.

Bsp.: $I = [-1,1] \times [-1,1] \times [2,4]$

1) $\int_I x^2 y e^{x\ln(z)}\,d(x,y,z)$

Die Funktion $f(x,y,z) = x^2 y\, e^{x\ln(z)}$ ist auf I stetig

$\Rightarrow$ Wegen Satz von Fubini kann ich die Reihenfolge beliebig wählen

$$\int_I x^2 y e^{x\ln(z)}\,d(x,y,z) = \int_2^4 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 y e^{x\ln(z)}\,dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_2^4 \left(\int_{-1}^1 x^2 e^{x\ln(z)} \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} dx \right) dz = \int_2^4 \left(\int_{-1}^1 x^2 e^{x\ln(z)} \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)}_{0} dx \right) dz = 0$$

Als UE Berechnen Sie $\int_2^4 \left(\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \dots dx \right) dy \right) dz$

2) $\int_I (x\cos(xy) + xz^2)\,d(x,y,z)$

Die Funktion $f(x,y,z) = x\cos(xy) + xz^2$ ist stetig auf I

$\Rightarrow$ Wir können mit dem Satz von Fubini arbeiten

$$\int_I (x\cos(xy) + xz^2)\,d(x,y,z) = \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(\int_2^4 (x\cos(xy) + xz^2)\,dz \right) d(x,y) =$$

$$= \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(2x\cos(xy) + \frac{xz^3}{3}\Big|_2^4 \right) d(x,y)$$

$$= \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(2x\cos(xy) + x\,\frac{64-8}{3} \right) d(x,y)$$

$$= \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(\underbrace{2x\cos(xy)}_{\frac{\partial}{\partial y}\sin(x,y)} + \frac{56x}{3} \right) d(x,y)$$

$$= \int_{-1}^1 \left(2\sin(xy)\Big|_{y=-1}^{y=1} + \frac{56xy}{3}\Big|_{y=-1}^{y=1} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(2\sin(x) - 2\sin(-x) + \frac{56x}{3}\cdot 2 \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(4\sin(x) + \frac{112}{3}x\right) dx$$

$$= -4\cos(x)\Big|_{-1}^{1} + \frac{112}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \cancel{-4\cos(1)} + \cancel{4\cos(-1)} + \frac{56}{3}(1-1)$$

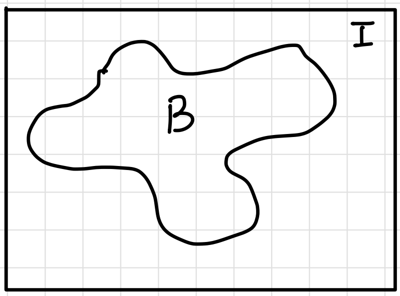
$$= 0$$

Frage: Wie berechnen wir

$$\int_B f(x)dx \text{ , falls } B \subset \mathbb{R}^n$$

kein Intervall ist?

Erster Versuch: Falls B beschränkt ist



Können wir ein Intervall finden, sodass $B \subseteq I$

Wir definieren

$$f_B(x) := \begin{cases} f(x) & \text{auf } B \\ 0 & \text{auf } I \setminus B \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Fortsetzung} \\ \text{von} \\ f\end{array}\right)$$

und setzen

$$\int_B f(x)dx = \int_I f_B(x)\,dx$$

Problem: Es kann sein, dass f_B nicht stetig ist auf I.

$\Rightarrow$ Nicht Riemann integrierbar.

Bsp.: $f(x) \equiv 1$ auf $B = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$

$$\int_B f(x)dx = \int_0^1 f_B(x)\,dx$$

B ist kein Intervall
aber $B \subset [0,1]$
$f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{auf } B \\ 0 & \text{in } I[0,1] \setminus B \end{cases}$

Diese Funktion f_B ist nicht Riemann integrierbar auf $[0,1]$